IV. LE PRISME

Les prismes sont utilisés pour décomposer une lumière en ses différentes couleurs ou pour mesurer des indices de réfraction. Nous allons définir le prisme puis déduire de nos connaissances sur la réfraction ses effets sur un rayon lumineux.

A. Description générale

1. Définition

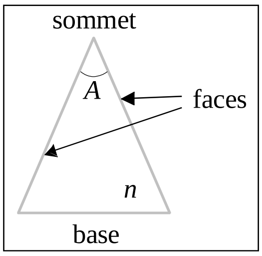

fig. 4.1a : une section droite du prisme

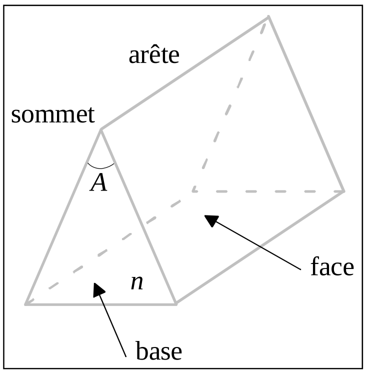

fig. 4.1b : un prisme

Un prisme est formé d'un milieu transparent limité par deux faces planes. Il est caractérisé par son angle au sommet *A* et par son indice de réfraction *n*. Les schémas ci-contre montrent une section droite du prisme et un prisme.

2. Son action sur un rayon lumineux

a) Les deux réfractions

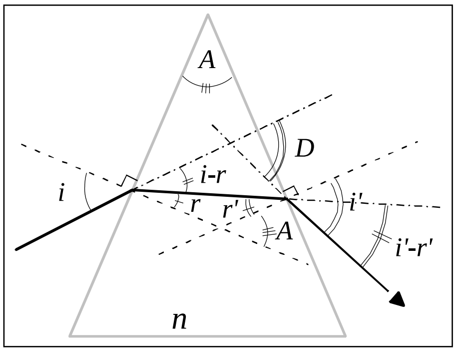

fig. 4.2a : cheminement d'un rayon lumineux

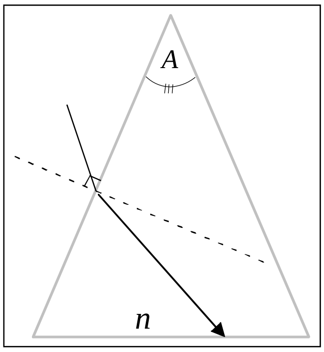

fig. 4.2b : placement erroné du rayon incident

Un rayon lumineux frappant une des faces du prisme est réfracté, il traverse ensuite le milieu d'indice *n*, puis est à nouveau réfracté (Voir figure 4.2a.)

Pour la première réfraction, l'angle d'incidence est noté *i*, l'angle de réfraction *r*. Pour la deuxième, l'angle d'incidence est noté *r*', l'angle de réfraction *i*'.

Pour utiliser correctement le prisme, le rayon incident doit se trouver dans un plan perpendiculaire à l'arête du prisme (sinon tout se passe comme si l'angle au sommet du prisme devenait variable). Dans les conditions correctes, les plans d'incidence et de réfraction sont tous confondus avec un plan de section droite du prisme, comme représenté sur le schéma.

b) Remarque

Nous limitons notre étude aux rayons incidents situés entre la base et la normale au prisme. Un rayon incident situé entre la normale et le sommet du prisme peut se trouver dévié vers la base du prisme qui est souvent obturée par le dispositif de fixation du prisme. (Voir figure 4.2b.)

c) Déviation

L'effet du prisme est donc de dévier le rayon lumineux. La déviation, qui est l'angle entre le rayon incident (initial) et le rayon émergent (réfracté final), est notée D.

d) Dispersion

De plus la déviation dépend de l'indice du prisme, lui-même fonction de la longueur d'onde car le milieu est dispersif. Ceci explique la décomposition de la lumière blanche en ses différentes couleurs.

Avec des prismes de verre, on constate expérimentalement que la lumière rouge est moins déviée que la lumière violette.

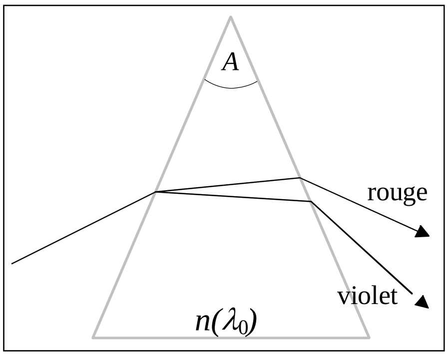

fig. 4.3 : influence de la longueur d'onde sur la déviation

B. Les relations caractéristiques du prisme et leurs conséquences

1. Les relations caractéristiques du prisme

Les relations caractéristiques du prisme sont au nombre de quatre :

- D'abord, les lois de la réfraction[1] :

$\boxed{\sin i = n \sin r}$ (1)

$\boxed{n \sin r' = \sin i'}$ (2)

Les lois sur les plans ont déjà été utilisées pour tracer le schéma.

- Ensuite, une contrainte géométrique liant A, r et r'. L'angle entre les normales aux faces du prisme est égal à A (voir figure 4.2a) et la somme des angles d'un triangle est égale à 180° :

$r + r' + (180° - A) = 180°$

$\boxed{r + r' = A}$ (3)

- Enfin, l'expression de la déviation :

$D = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r') = i + i' - A$

$\boxed{D = i + i' - A}$ (4)

[1] Voir le chapitre III Réflexion, réfraction, paragraphes A.2 et C.2.

2. Dispersion

a) Couleur et longueur d'onde

Quand le prisme est éclairé en lumière blanche, on observe à la sortie du prisme, un pinceau lumineux où se déploient les couleurs de l'arc-en-ciel. Ces couleurs varient continûment du violet au rouge en passant par l'indigo, le bleu, le vert, le jaune et l'orange. L'indigo est un violet tirant sur le bleu. L'ultraviolet et l'infrarouge encadrent la lumière visible. Leurs longueurs d'onde dans le vide[2] sont les suivantes :

Couleur	Ultra-violet	violet	indigo	bleu	vert	jaune	orange	rouge	Infra-rouge
λ_0 (nm)		400	440	470	530	580	650	750	

b) Influence de l'indice de réfraction sur la déviation

La déviation est donnée par $D = i + i' - A$ et nous cherchons à trouver comment varie D lorsque l'indice n varie. (Le verre étant dispersif, son indice varie avec la longueur d'onde.)

Pour un rayon incident donné, l'angle d'incidence i est fixé ; Et A est un paramètre constant pour un prisme donné. Donc D dépend de i'. Il faut donc trouver comment varie i' en fonction de n.

Procédons par étapes :

Lors de la première réfraction r est donné par $\sin r = \sin i/n$; Donc quand n augmente, r diminue.

Ensuite r' est donné par $r' = A - r$; Donc r' augmente quand r diminue.

Enfin la deuxième réfraction donne $\sin i' = n \sin r'$; Donc i' augmente quand r' et n augmentent.

<u>Au total D augmente quand n augmente</u>.

c) Influence de la longueur d'onde sur la déviation

En première approximation, la loi de Cauchy donne les variations de l'indice de réfraction d'un verre en fonction de la longueur d'onde :

$$n = a + \frac{b}{\lambda_0^2}$$

où a et b sont des constantes caractérisant le milieu transparent.

Cette loi montre que l'indice augmente quand la longueur d'onde diminue, c'est à dire lorsque l'on passe du rouge au violet.

Par conséquent, <u>la lumière rouge sera moins déviée que la lumière violette</u>. Ce qui est conforme aux constatations expérimentales.

d) Utilisation de la dispersion produite par un prisme

Lorsque de la lumière produite par une source lumineuse (lampe, soleil ou étoile) frappe un prisme, elle est décomposée en ses différentes couleurs. On dit qu'on a formé le « spectre » de la

---

[2] Voir le chapitre II Propagation de la lumière, paragraphes D.5 & 6.

lumière étudiée. Ceci permet, pour une étoile par exemple, de recueillir des informations sur les espèces chimiques constituant l'étoile car chaque élément chimique émet des couleurs déterminées.

3. Condition d'émergence

Il y a deux conditions d'émergence, l'une sur l'angle d'incidence et l'autre sur l'angle du prisme.

a) Condition sur l'angle d'incidence

Pour que le rayon émergent existe, il faut que $r' \leq r'_{\lim}$, angle limite d'incidence, car lorsque $r' > r'_{\lim}$ il y a réflexion totale sur la seconde face du prisme. Lorsque $r' = r'_{\lim}$ l'angle i' vaut 90°, l'angle $r'_{\lim}$ est donc donné par :

$$n \sin r'_{\lim} = \sin(90°) = 1$$

$$\sin r'_{\lim} = \frac{1}{n}$$

La condition $r' \leq r'_{\lim}$ impose $r \geq A - r'_{\lim}$ car $r = A - r'$ d'après la relation (3).

Et ceci impose $\sin i \geq n \sin(A - r'_{\lim})$ d'après la relation (1), donc :

$i \geq i_0$ avec :

$$\boxed{\sin i_0 = n \sin(A - r'_{\lim})}.$$

b) Condition sur l'angle du prisme

De plus, l'angle de réfraction r est toujours inférieur à l'angle limite de réfraction $r_{\lim}$, égal à l'angle limite d'incidence $r'_{\lim}$. Par conséquent, les deux inégalités : $r' \leq r'_{\lim}$ et $r \leq r_{\lim}$ sont vérifiées simultanément, or $r + r' = A$, donc :

$$\boxed{A \leq 2\, r_{\lim} \text{ avec } \sin r_{\lim} = 1/n}.$$

Lorsque $A > 2\, r_{\lim}$, il y a toujours réflexion totale.

Exemple : Nous considérons un prisme en verre dont l'angle A vaut 90°. L'indice du verre est $n = 1{,}5$. Calculons $r_{\lim}$:

$$\sin r_{\lim} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}666 \quad \Rightarrow \quad r_{\lim} \approx 42°$$

Il y aura toujours réflexion totale pour $A > 84°$.

c) Prisme à réflexion totale

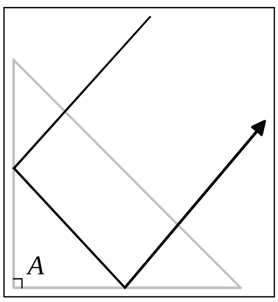

fig. 4.4 : prisme
à réflexion totale

C'est un prisme dont la section droite est un triangle rectangle isocèle. (Voir figure 4.4.) On dirige le rayon lumineux vers la base du prisme en incidence normale. Le rayon pénètre dans le prisme sans déviation puis frappe la première face sous une incidence de 45° supérieure à l'angle limite d'incidence ; il y a donc réflexion totale. La deuxième face agit de la même façon car l'incidence vaut à nouveau 45°. Ceci permet d'utiliser le prisme différemment, c'est à dire pour « couder » le rayon lumineux.

Ce type de prisme est employé dans les jumelles et dans les lunettes terrestres, pour en diminuer l'encombrement et redresser l'image (sans cela, le ciel serait en bas et le sol en haut). Cela nécessite deux prismes à réflexion totale dont les arêtes sont orthogonales.

C. Etude des variations de la déviation en fonction de l'angle d'incidence

1. Domaine de définition

L'angle d'incidence varie de i_0 à 90°. Dans ce domaine, toutes les fonctions qui construisent D sont définies, donc il en est de même pour D. (Voir paragraphe B.3.a pour la définition de i_0.)

2. Etude qualitative

En considérant la relation (1), nous constatons que r est fonction de i. La relation (3) montre que r' est fonction de r donc de i. La relation (2) implique que i' est fonction de r' donc de i. Donc la déviation D est fonction de l'angle i – ce qui semble a priori naturel.
Finalement, toutes les variables sont fonctions de l'angle d'incidence i ; L'angle du prisme A et l'indice de réfraction n sont des paramètres.

3. Expression de la dérivée.

Nous dérivons la déviation par rapport à l'angle d'incidence, l'angle du prisme et l'indice étant constants c'est à dire que le prisme est invariable et que la longueur d'onde est fixée. Il vient, d'après la relation (1) :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

Il nous faut calculer di'/di. La dérivation par rapport à r' de la relation (2) nous fournit di'/dr' :

$$\cos i' \frac{di'}{dr'} = n\cos r' \quad \Rightarrow \quad \frac{di'}{dr'} = \frac{n\cos r'}{\cos i'}$$

La dérivation par rapport à r de la relation (3) nous fournit dr'/dr :

$$1 + \frac{dr'}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dr'}{dr} = -1$$

La dérivation par rapport à i de la relation (1) nous fournit dr/di :

$$\cos i = n\cos r \frac{dr}{di} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n\cos r}$$

Finalement :

$$\frac{di'}{di} = \frac{di'}{dr'}\frac{dr'}{dr}\frac{dr}{di} = \frac{n\cos r'}{\cos i'}(-1)\frac{\cos i}{n\cos r} = -\frac{\cos r' \cos i}{\cos i' \cos r}$$

D'où :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos r'\cos i}{\cos i'\cos r}$$

4. Etude de la dérivée

a) Deux valeurs particulières

Pour i = 90°, cos$i$ =0, ni cosi' ni cos$r$ ne sont nuls donc :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos r'\cos i}{\cos i'\cos r} = 1 - \frac{\cos r'.0}{\cos i'\cos r} = 1$$. Cette quantité est positive.

Pour $i = i_0$, alors $r = A - r'_{\lim}$, $r' = r'_{\lim}$ et i' = 90°, donc cos$i$, cosi' et cos$r$ sont strictement positifs mais cosi' = 0 donc :

$$\frac{dD}{di} \to -\infty$$. Cette quantité est négative.

b) Recherche des zéros de la dérivée

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos r'\cos i}{\cos i'\cos r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos r'\cos i = \cos i'\cos r$$

Les angles sont tous compris entre 0 et 90°, donc les cosinus sont tous positifs. La dernière égalité est donc équivalente à son carré :

$$\cos^2 r'\cos^2 i = \cos^2 i'\cos^2 r$$

$$(1-\sin^2 r')(1-\sin^2 i) = (1-\sin^2 i')(1-\sin^2 r)$$

$$\left(1-\frac{\sin^2 i'}{n^2}\right)(1-\sin^2 i) = (1-\sin^2 i')\left(1-\frac{\sin^2 i}{n^2}\right)$$

$$1-\frac{\sin^2 i'}{n^2} - \sin^2 i + \frac{\sin^2 i\sin^2 i'}{n^2} = 1 - \frac{\sin^2 i}{n^2} - \sin^2 i' + \frac{\sin^2 i\sin^2 i'}{n^2}$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sin^2 i' = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sin^2 i$$

Comme n est différent de 1, cette équation est équivalente à :

$$\sin^2 i' = \sin^2 i$$

Comme tous les angles sont compris entre 0 et 90°, les sinus sont positifs, donc cette équation est équivalente à :

$$\sin i' = \sin i$$

Comme tous les angles sont compris entre 0 et 90°, cette équation est équivalente à :

$$i' = i$$

La dérivée dD/di ne s'annule qu'une fois lorsque i varie de i_0 à 90°.

5. Tableau de variation : minimum de déviation

a) Existence du minimum de déviation

i	i_0	$i = i' = i_{min}$	90°
$\dfrac{dD}{di}$	$-\infty$ -	0	+ +1
D		D_{min}	

Lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, la déviation passe par un minimum D_{min}. (Ceci suppose que $i_0 < i_{min}$, sinon la déviation croît avec l'angle d'incidence.)

b) Remarque

La loi du retour inverse de la lumière montre que lorsqu'on change *i* en *i'*, *r* et *r'* s'échangent et *i'* devient *i*. Donc la déviation est inchangée.

Ceci implique que *D* passe par un extremum pour $i = i' = i_{ext}$.

L'existence du minimum de déviation étant admise, cette remarque permet de retrouver rapidement l'expression de D_{min}.

c) Représentation graphique

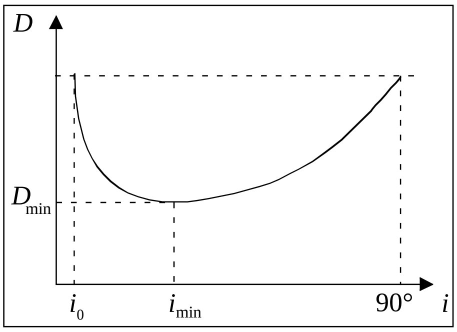

fig. 4.5 : variation de la déviation
en fonction de l'angle d'incidence

d) Expression du minimum de déviation

Au minimum de déviation,

$$i = i' = i_{min}$$

$$D_{min} = 2i_{min} - A \quad \Leftrightarrow \quad i_{min} = \frac{D_{min} + A}{2}$$

$$r = r' = r_{min} \quad \Leftrightarrow \quad A = 2r_{min} \quad \Leftrightarrow \quad r_{min} = \frac{A}{2}$$

$$\sin i_{min} = n \sin r_{min} \quad \Leftrightarrow \quad \sin \frac{D_{min} + A}{2} = n \sin \frac{A}{2}$$

Cette dernière relation permet de calculer $D_{\min}$ connaissant le prisme, c'est à dire l'indice n et l'angle A.

Elle est en fait plus souvent utilisée pour déterminer avec une bonne précision l'indice du prisme pour une longueur d'onde donnée. On mesure l'angle du prisme et le minimum de déviation, et on en déduit l'indice n pour la lumière monochromatique choisie :

$$\boxed{n = \frac{\sin \frac{D_{\min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}}.$$

L'étude du prisme a montré qu'il dévie et disperse la lumière. La déviation augmente avec l'indice de réfraction qui dans le verre diminue quand la longueur d'onde augmente. La lumière rouge est donc moins déviée que la lumière violette. Pour une longueur d'onde donnée, la déviation passe par un minimum quand l'angle d'incidence augmente. La connaissance de ce minimum permet de mesurer l'indice de réfraction.

Résumé

L'effet du prisme est de dévier les rayons lumineux.

Cette déviation dépend de l'indice du prisme, lui-même fonction de la longueur d'onde car le milieu est dispersif. La déviation augmente avec l'indice de réfraction qui dans le verre diminue quand la longueur d'onde augmente. La lumière rouge est donc moins déviée que la lumière violette.

Les relations caractéristiques du prisme sont au nombre de quatre :

$\boxed{\sin i = n \sin r}$ (1)

$\boxed{n \sin r' = \sin i'}$ (2)

$\boxed{r + r' = A}$ (3)

$\boxed{D = i + i' - A}$ (4)

Minimum de déviation : Lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, la déviation passe par un minimum $D_{\min}$ pour $i = i' = i_{\min}$. La mesure du minimum de déviation permet la mesure de l'indice de réfraction :

$$\boxed{n = \frac{\sin \frac{D_{\min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}}$$